Examen terminal de mécanique des solides

Mardi 17 mai 2016 - durée : 1h30

Dynamique et Energétique d'un pendule solide articulé

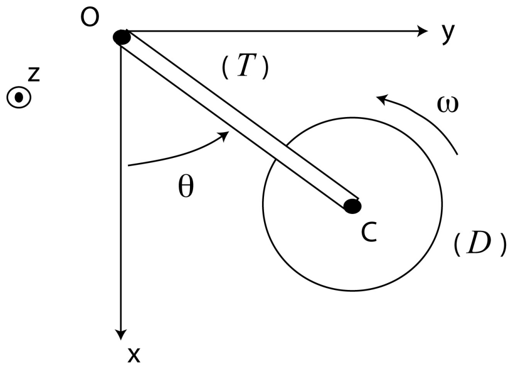
Un pendule solide articulé est constitué d'une tige homogène ($\mathcal{T}$), de masse *m*, de longueur $OC = \ell$, de centre de masse A et d'un disque homogène ($\mathcal{D}$), de centre *C*, de masse *M* et de rayon *r*, pouvant tourner autour de son axe (*Cz*) à la vitesse angulaire ω. On suspend ce pendule solide par le point *O*, origine du référentiel terrestre $\mathcal{R}(Oxyz)$ où (*Ox*) est la verticale descendante. Le pendule peut osciller autour de l'axe horizontal (Oz) grâce à deux liaisons pivots parfaites en *O* et en *C*. La position de la tige est repérée par rapport à l'axe vertical descendant par l'angle θ.

On donne les moments d'inertie :

- de la tige par rapport à un axe de révolution situé à l'une de ses extrémités : $I_{Oz} = m\ell^2/3$
- du disque par rapport à son axe de révolution : $I_{Cz} = Mr^2/2$

Partie I :

1. Préciser le(s) degré(s) de liberté (DDL) du pendule.
2. Faire le bilan des actions extérieures qui s'exercent sur le pendule, en précisant leur point d'application.
3. Combien d'inconnues (DDL + forces) comporte le problème étudié ?
4. Combien d'équations seront nécessaires pour parvenir à décrire le mouvement du pendule ?



***Dans ce problème**, on se propose de se concentrer uniquement sur **la détermination des DDL**, par 2 méthodes différentes : en utilisant les théorèmes de la dynamique et de l'énergétique.*

On ne cherchera pas à déterminer les actions de liaisons en O (ni en C). Si besoin, on notera $\vec{T}_O$ (ou $\vec{T}_C$) les actions mécaniques qui assurent les liaisons en O (et C).

Partie II : Aspects cinétiques

5. Déterminer, dans la base polaire $(\vec{e}_\rho,\ \vec{e}_\theta)$, que l'on représentera sur un schéma, le vecteur-position $\overrightarrow{OG}$ du centre de masse G du pendule solide constitué par la tige et le disque, en fonction de *M*, *m* et ℓ.

6. Donner l'expression, dans la base polaire $(\vec{e}_\rho,\ \vec{e}_\theta)$, des quantités de mouvement de la tige, du disque, puis du pendule solide, en fonction de M, m, ℓ et $\dot{\theta}$.
7. Déterminer, en justifiant les expressions utilisées et en citant éventuellement le(s) nom(s) de(s) théorème(s) utilisé(s), les moments cinétiques en O de la tige et du disque. En déduire que le moment cinétique en O du pendule solide est :

$$\vec{L}_O(D+T) = \left[\frac{m\ell^2}{3}\dot{\theta} + M\left(\frac{r^2}{2}\omega + \ell^2\dot{\theta}\right)\right]\vec{e}_z$$

Partie III : Aspects dynamiques

8. Ecrire les équations vectorielles des théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique en un point quelconque O' qui décrivent le mouvement du pendule solide. En quel point est-il judicieux d'appliquer le théorème du moment cinétique, dans le cas du pendule solide constitué de l'ensemble tige = disque, pourquoi ? Est-il possible de résoudre les équations du mouvement sans connaître les actions de contact en O ?
9. Afin de disposer d'une équation supplémentaire ne faisant pas intervenir les actions de contact en O, on s'intéresse tout d'abord au mouvement du disque seul.
   a. Quelles sont les forces extérieures s'exerçant sur le disque? Préciser leur point d'application.
   b. Que dire du moment des forces extérieures en C, qui s'exercent sur le disque $\mathcal{D}$?
   c. En déduire l'équation du mouvement en ω établie à partir du théorème du moment cinétique en C, pour le disque $\mathcal{D}$. Que peut-on en déduire sur ω ? En déduire qu'il ne reste donc qu'un seul Degré de liberté.
10. A partir de l'application du théorème du moment cinétique, en O, pour le pendule solide et du résultat de la question précédente, déterminer l'équation différentielle en θ qui régit le mouvement du pendule. Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$\ddot{\theta} + {}^{g}/_{\ell}\ \frac{M+{}^{m}/_{2}}{M+{}^{m}/_{3}}\ sin\theta = 0$ et en déduire la période des oscillations dans le cas de petits mouvements.

11. Que devient l'équation du mouvement en θ lorsque m << M. Ce résultat est-il celui attendu ?

Partie IV : Aspects Energétiques

12. Montrer que l'énergie potentielle du pendule solide s'écrit, à une constante près : $E_p = -\left(\frac{m}{2} + M\right) g\ell\ cos\theta$
13. Déterminer, en justifiant les expressions utilisées et en citant éventuellement le(s) nom(s) de(s) théorème(s) utilisé(s), les énergies cinétiques de la tige et du disque. En déduire l'énergie cinétique du pendule solide.
14. En déduire l'expression de l'énergie mécanique du pendule solide.
15. Que dire de l'énergie mécanique ?
16. En déduire l'équation différentielle du mouvement établie en 10.